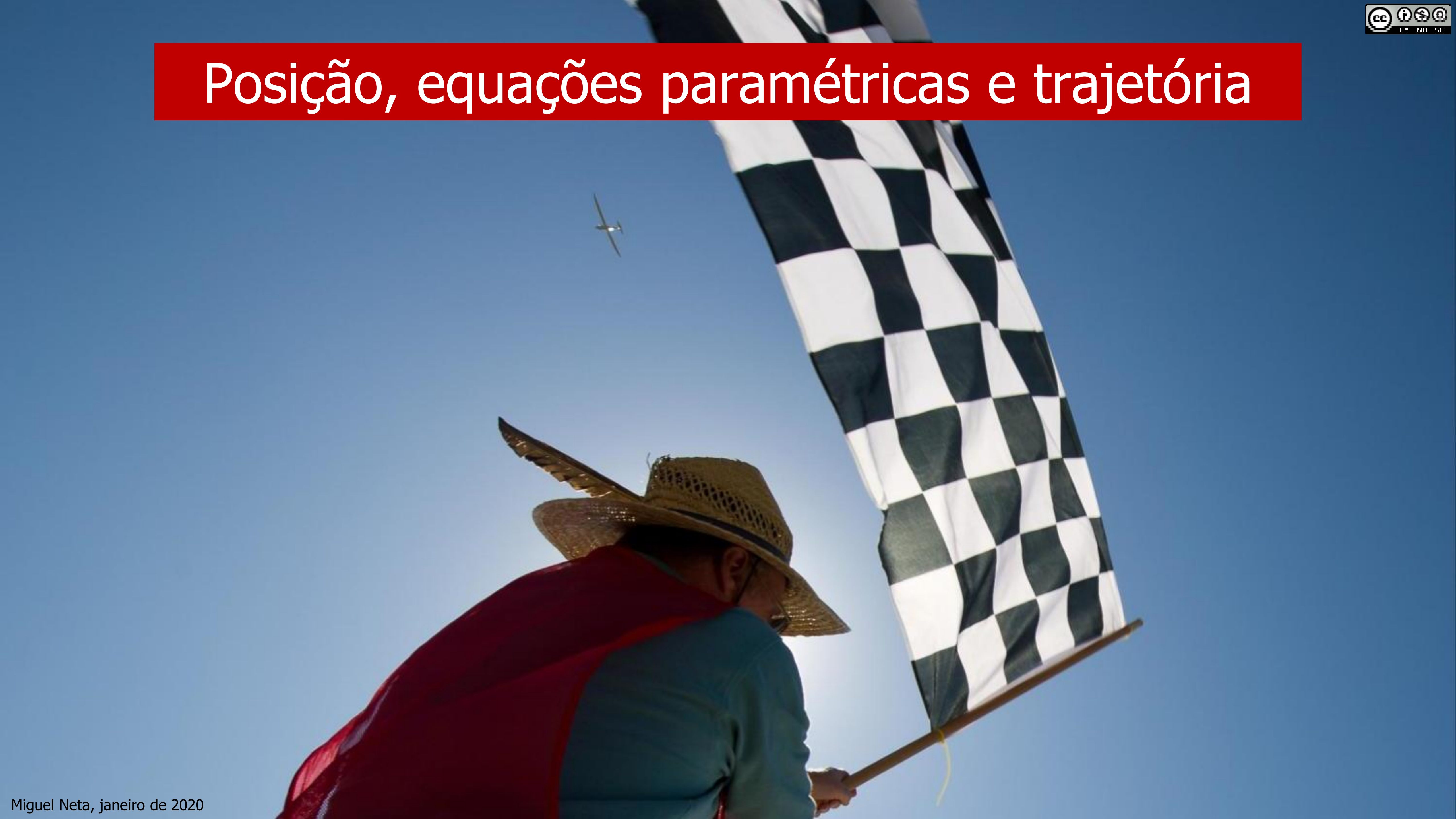
Posição, equações paramétricas e trajetória



Miguel Neta, janeiro de 2020

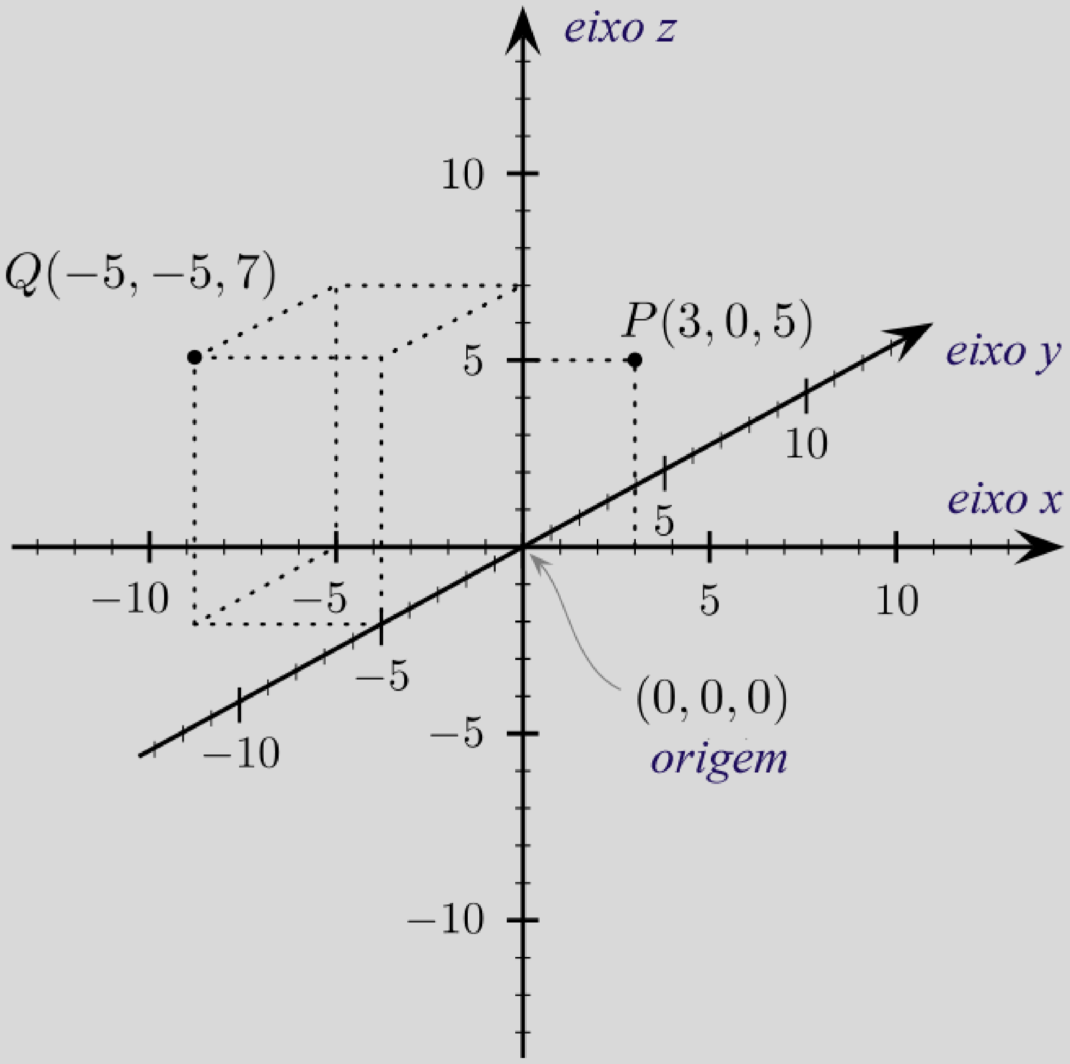
Referencial

A posição de um corpo só pode ser conhecida a partir de um **referencial**.

O referencial é o sistema de coordenadas, que, para ser definido, necessita ter:

> **Origem** – ponto a partir do qual se efetuam as medições;
>
> **Escala** – necessária para medir as distâncias.

A posição de um corpo é o conjunto das coordenadas num determinado referencial.

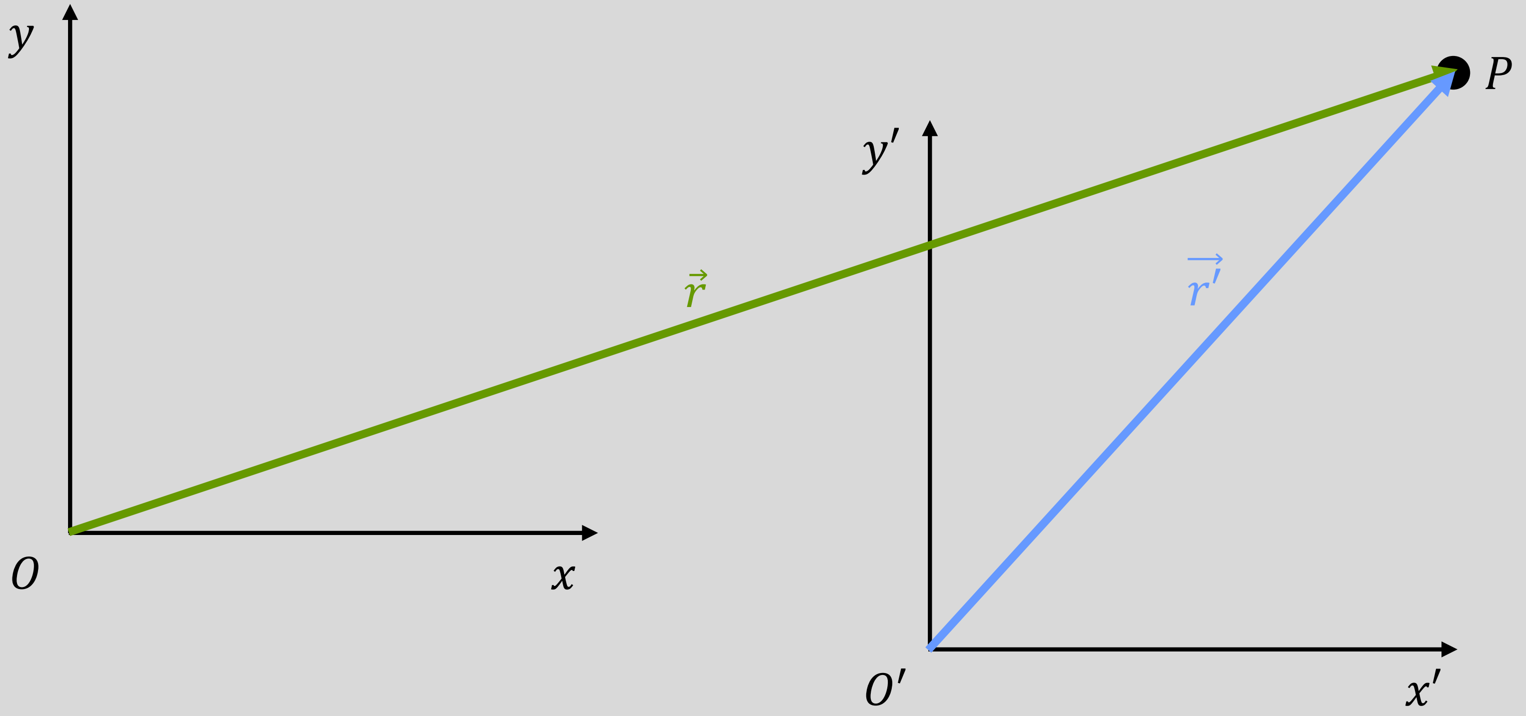


[Imagem: pt.wikibooks.com, adaptada]

Posição ($\vec{r}$)

A posição de um corpo num determinado instante fica definida por um **vetor posição**, $\vec{r}$.

Vetor: origem na origem do referencial → posição do corpo



Um corpo pode ter, no mesmo instante, posições diferentes, $\vec{r}$ e $\vec{r'}$, em diferentes referenciais, O e O'.

Coordenadas cartesianas

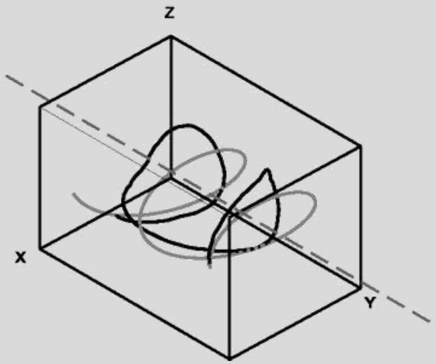
Inventadas por Descartes (1596-1650).

Funcionam para situações em que é **desprezível a curvatura da Terra**.

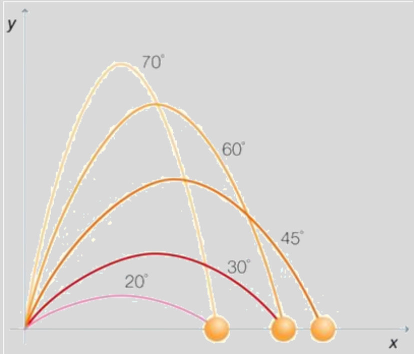
Usam eixos xx, yy e zz ortogonais (90º entre si) e ortonormados (mesma escala nos três eixos).

Podem ser simplificadas para apenas dois ou um eixo.

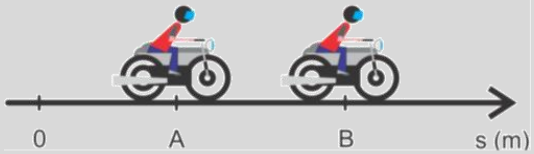
René Descartes (1596-1650).



Tridimensional (3 eixos)



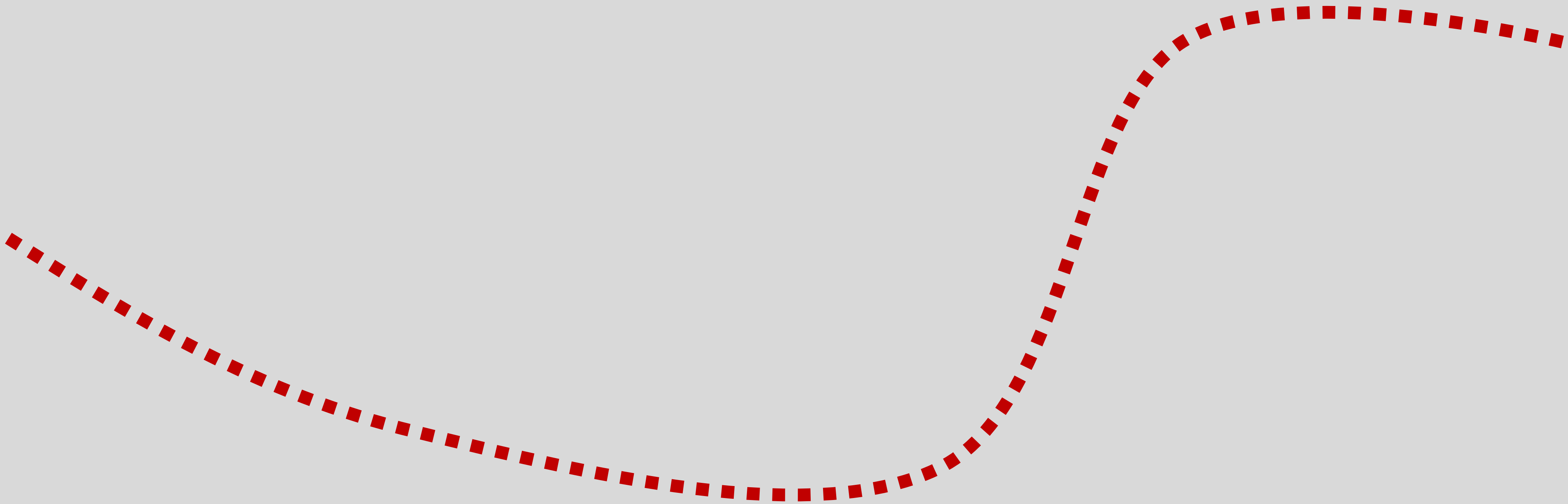
Bidimensional (2 eixos)



Unidimensional (1 eixo)

Trajetória

É o conjunto de **todas as posições ocupadas** por corpo, relativamente a um determinado referencial, **ao longo do tempo**.



A trajetória pode ser **retilínea** ou **curvilínea**.

Posição ($\vec{r}$)

Situação A

A trajetória é **retilínea** (basta um eixo);

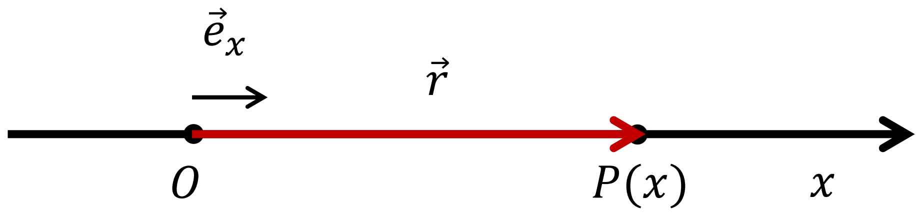
Faz-se coincidir o eixo OX com essa trajetória;

É definido um **versor** (**vetor unitário**), $\vec{e}_x$, para o eixo OX;

O vetor posição, $\vec{r}$, que descreve a posição $P(x)$ será:

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x$$

Exemplo: $\vec{r} = 3\,\vec{e}_x$



Posição ($\vec{r}$)

Situação B

A trajetória é uma **curva plana** (necessários dois eixos);

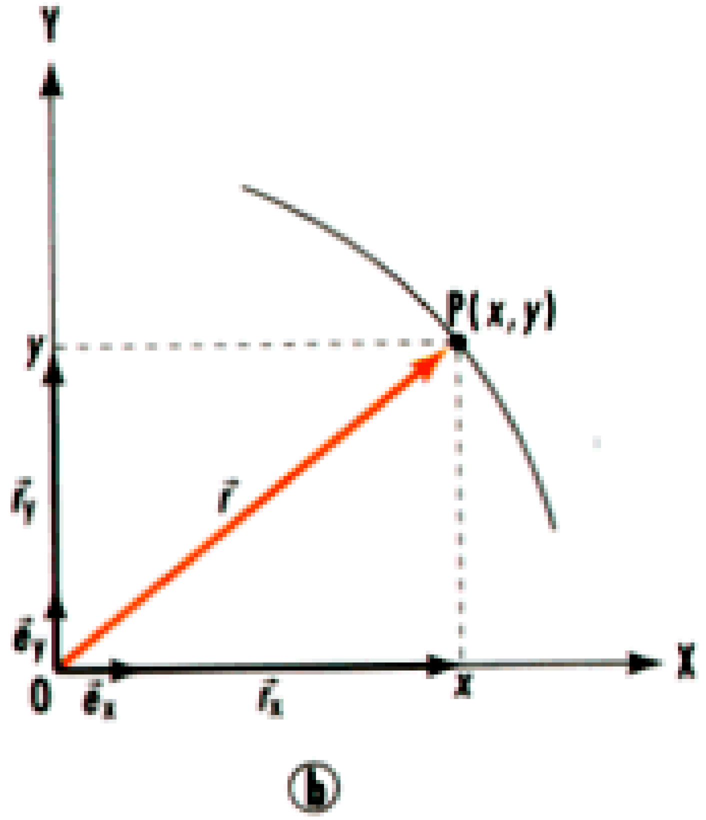
Faz-se coincidir o plano XOY com o plano onde a partícula se move;

São definidos os **versores unitários** $\vec{e}_x$ e $\vec{e}_y$;

O vetor posição para o ponto $P(x, y)$ será:

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y$$

Exemplo: $\vec{r} = 3\,\vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y$



Posição ($\vec{r}$)

Situação C

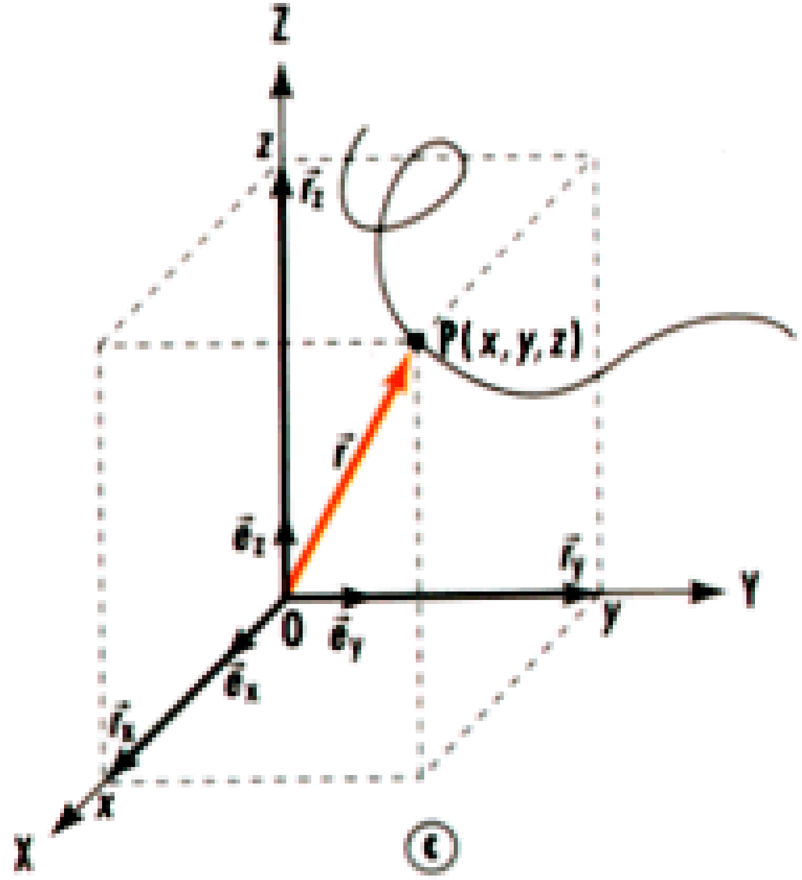
A trajetória é uma **curva** no espaço a **três dimensões** (necessários três eixos);

…

O vetor posição será:

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

Exemplo: $\vec{r} = 2\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_y + 5\,\vec{e}_z$



Posição ($\vec{r}$)

Em cada instante, a **norma do vetor posição**, $\boldsymbol{r}$, ou $|\vec{r}|$, é calculado pela expressão:

$$\boldsymbol{r} = |\vec{\boldsymbol{r}}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2}$$

Este valor representa o **tamanho** do vetor $\vec{r}$.

Lei do movimento

A posição de um determinado ponto em **movimento** vai mudando à medida que o **tempo** passa.

Nesse caso o **vetor posição** será **dependente** da variável **tempo** (t)…

…as suas componentes escalares, x, y e z, mudam ao longo do tempo.

O vetor posição passará a escrever-se, para um determinado instante t:

$$\underbrace{\boldsymbol{\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z}}_{\textbf{Lei do movimento}}$$

Por exemplo: $\vec{r}(t) = (3t)\,\vec{e}_x + (5 - t^2)\,\vec{e}_y + (2t)\,\vec{e}_z$

Equações paramétricas do movimento

A partir da **Lei do movimento**, podemos definir as **equações paramétricas** (ou equações escalares):

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Cada uma destas equações paramétricas permite identificar o **tipo de movimento** do corpo **para cada um dos eixos** x, y e z.

Por exemplo: $\vec{r}(t) = (3t)\,\vec{e}_x + (5 - t^2)\,\vec{e}_y + (2t)\,\vec{e}_z$

$$x(t) = 3t$$
$$y(t) = 5 - t^2$$
$$z(t) = 2t$$

Equações da trajetória

A equação da trajetória (permite ter um gráfico de y em função de x) é calculada a partir das equações paramétricas

$$x = x(t)$$

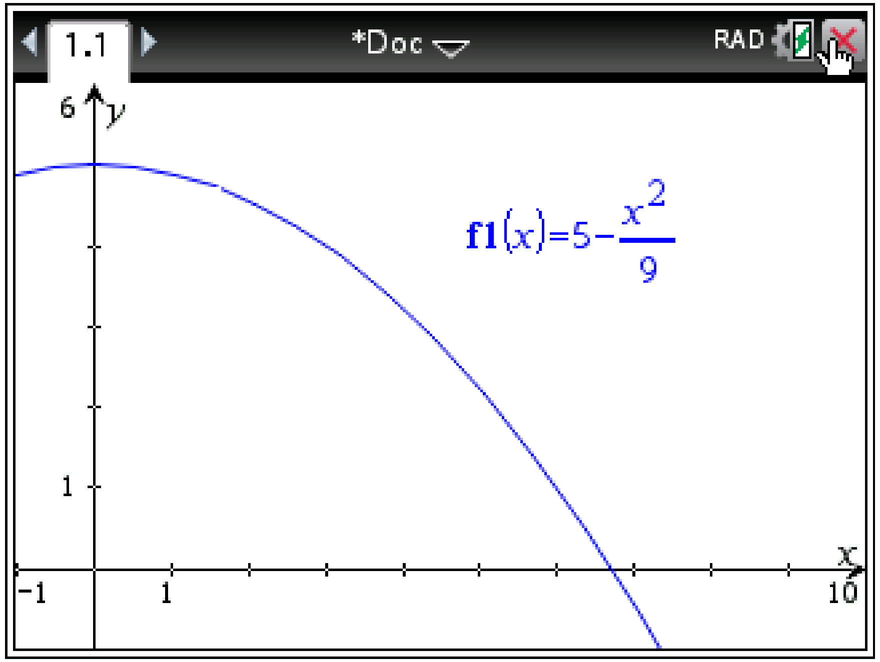
$$y = y(t)$$

removendo, por substituição, a dependência do fator tempo, t.

Por exemplo: $x = 3t$

$$y = 5 - \frac{x^2}{9}$$

$y = 5 - t^2$



Bibliografia

- G. Ventura, M. Fiolhais, C. Fiolhais, J. A. Paixão, R. Nogueira e C. Portela, “Novo 12F”, Texto Editores, Lisboa, 2017.